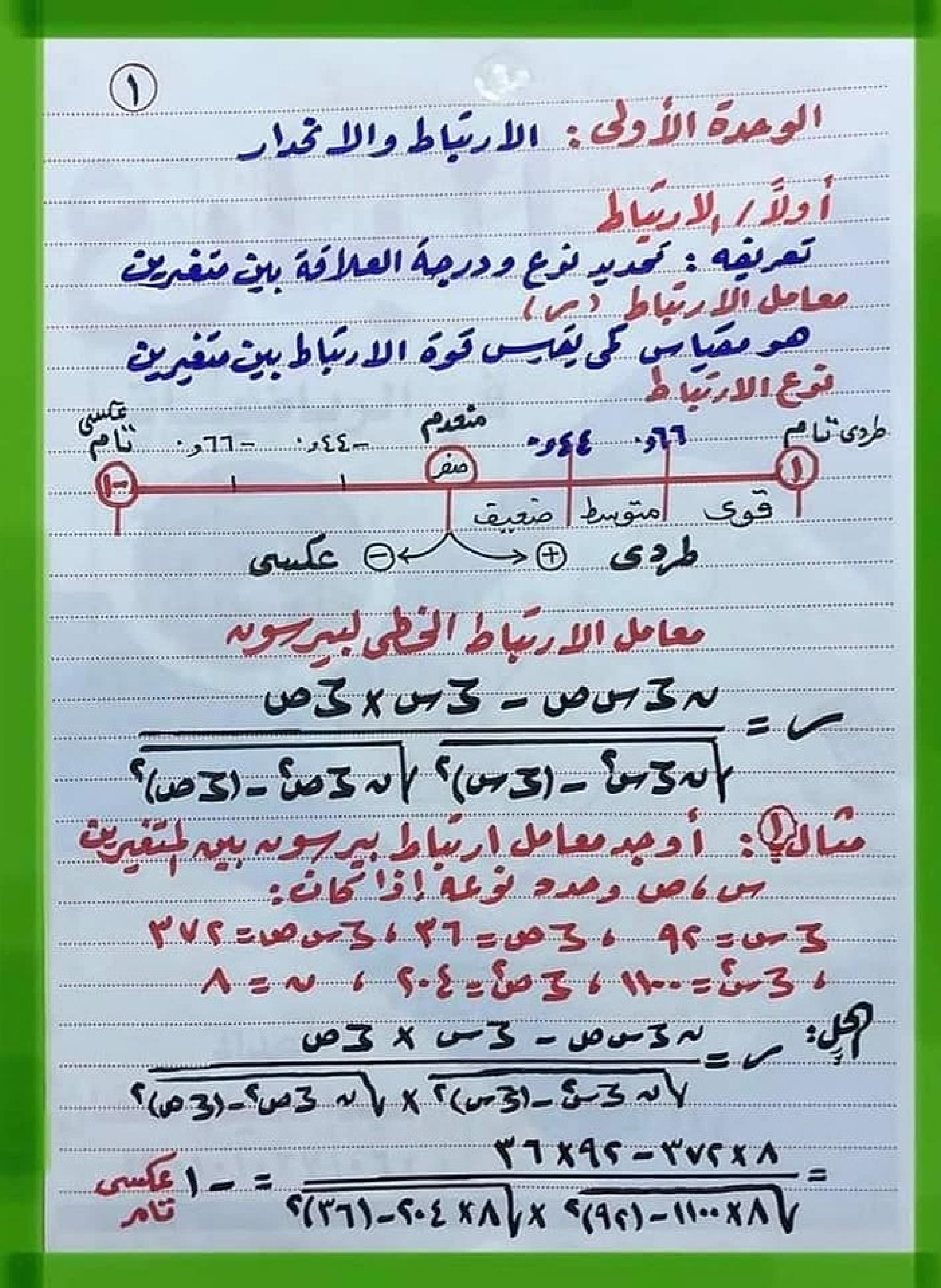


الوحدة الأولى : الارتباط والانحدار

أولاً / الارتباط

تعريفه : تحديد نوع ودرجة العلاقة بين متغيرين

معامل الارتباط (ر)

هو مقياس كمي يقيس قوة الارتباط بين متغيرين

نوع الارتباط

معامل الارتباط الخطي لبيرسون

$$ر = \frac{ن \text{ مج } س ص - \text{مج } س \times \text{مج } ص}{\sqrt{ن \text{ مج } س^2 - (\text{مج } س)^2}\ \sqrt{ن \text{ مج } ص^2 - (\text{مج } ص)^2}}$$

مثال ١ : أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه إذا كانت :

مج س = ٩٢ ، مج ص = ٣٦ ، مج س ص = ٣٧٢

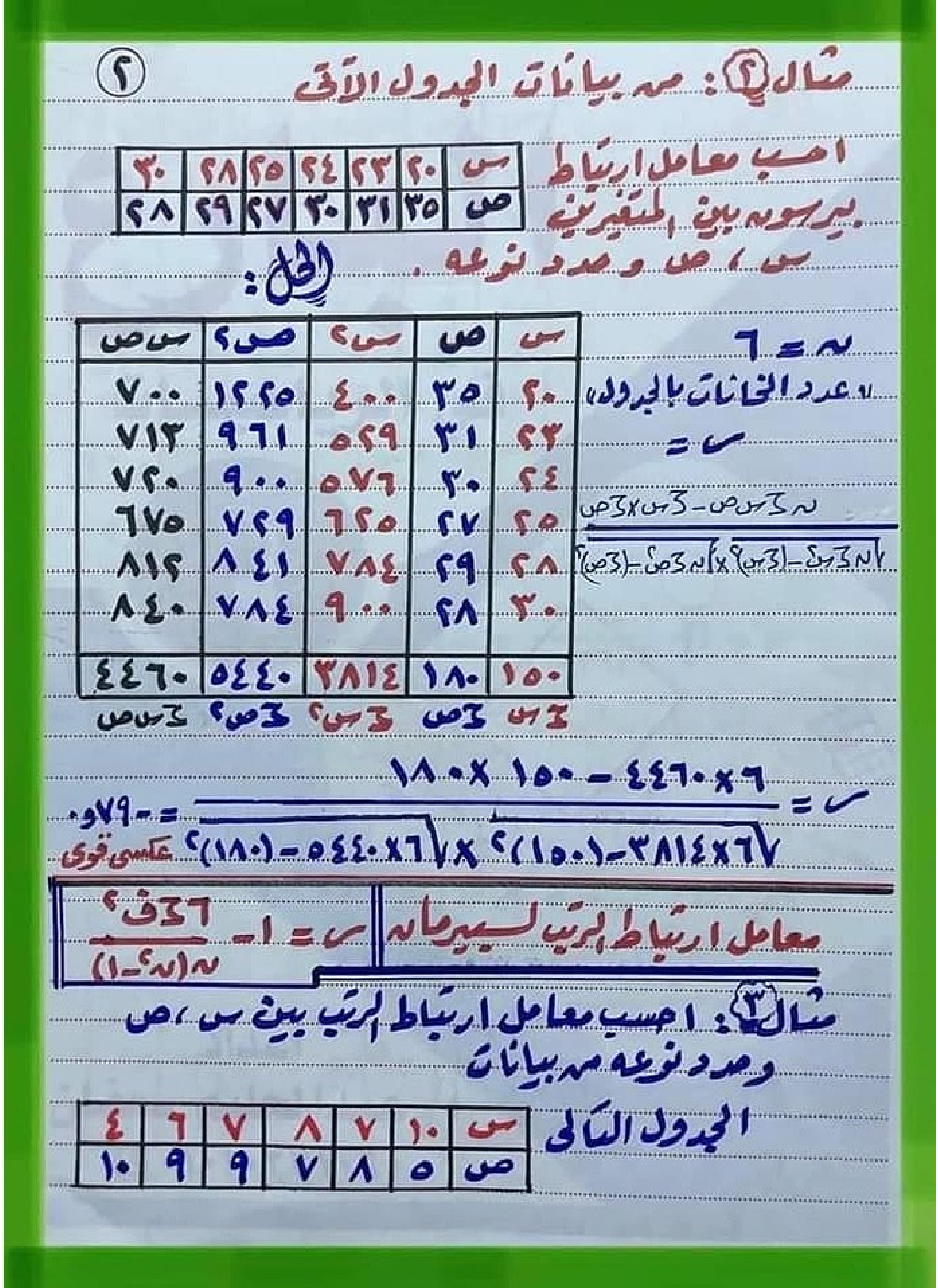
، مج $س^2$ = ١١٠٠ ، مج $ص^2$ = ٢٠٤ ، ن = ٨

الحل :

$$ر = \frac{ن \text{ مج } س ص - \text{مج } س \times \text{مج } ص}{\sqrt{ن \text{ مج } س^2 - (\text{مج } س)^2} \times \sqrt{ن \text{ مج } ص^2 - (\text{مج } ص)^2}}$$

$$= \frac{٨ \times ٣٧٢ - ٩٢ \times ٣٦}{\sqrt{٨ \times ١١٠٠ - (٩٢)^2} \times \sqrt{٨ \times ٢٠٤ - (٣٦)^2}} = -١$$

عكسي تام



مثال (٢): من بيانات الجدول الآتي

احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه.

س	٢٠	٢٣	٢٤	٢٥	٢٨	٣٠
ص	٣٥	٣١	٣٠	٢٧	٢٩	٢٨

الحل:

س	ص	س٢	ص٢	س ص
٢٠	٣٥	٤٠٠	١٢٢٥	٧٠٠
٢٣	٣١	٥٢٩	٩٦١	٧١٣
٢٤	٣٠	٥٧٦	٩٠٠	٧٢٠
٢٥	٢٧	٦٢٥	٧٢٩	٦٧٥
٢٨	٢٩	٧٨٤	٨٤١	٨١٢
٣٠	٢٨	٩٠٠	٧٨٤	٨٤٠
١٥٠	١٨٠	٣٨١٤	٥٤٤٠	٤٤٦٠
مجـ س	مجـ ص	مجـ س٢	مجـ ص٢	مجـ س ص

ن = ٦ "عدد الخانات بالجدول"

$$ر = \frac{ن\,مجـ\,س\,ص - مجـ\,س \times مجـ\,ص}{\sqrt{ن\,مجـ\,س^2 - (مجـ\,س)^2} \times \sqrt{ن\,مجـ\,ص^2 - (مجـ\,ص)^2}}$$

$$ر = \frac{٦ \times ٤٤٦٠ - ١٥٠ \times ١٨٠}{\sqrt{٦ \times ٣٨١٤ - (١٥٠)^2} \times \sqrt{٦ \times ٥٤٤٠ - (١٨٠)^2}} = -٠٫٧٩$$

عكسي قوي

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

$$ر = ١ - \frac{٦\,مجـ\,ف^2}{ن(ن^2 - ١)}$$

مثال (٣): احسب معامل ارتباط الرتب بين س ، ص وحدد نوعه من بيانات الجدول التالي

س	١٠	٧	٨	٧	٦	٤
ص	٥	٨	٧	٩	٩	١٠



الحل

س	ص	ر(س)	ر(ص)	ف	ف²
١٠	٥	١	٦	-٥	٢٥
٧	٨	٣,٥	٤	-٠,٥	٠,٢٥
٨	٧	٢	٥	-٣	٩
٧	٩	٣,٥	٢,٥	١	١
٦	٩	٥	٢,٥	٢,٥	٦,٢٥
٤	١٠	٦	١	٥	٢٥
					٦٦,٥

س	ر	الترتيب النهائي	ص	ر	الترتيب النهائي
١٠	١	١	٥	٦	٦
٧	٣	٣,٥	٨	٤	٤
٨	٢	٢	٧	٥	٥
٧	٤	٣,٥	٩	٢	٢,٥
٦	٥	٥	٩	٣	٢,٥
٤	٦	٦	١٠	١	١

هامش للتوضيح ليس ضروري أن يكتبه الطالب

من الجدول: ن = ٦ ، مج ف² = ٦٦,٥ ∴ $ر = ١ - \frac{٦ \text{ مج ف}^٢}{ن(ن^٢ - ١)}$

∴ $ر = ١ - \frac{٦٦,٥ \times ٦}{٦(٣٦ - ١)} = -٠,٩$ **عكسي قوي .**

مثال ٤ : من بيانات الجدول التالي احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان مبيناً نوعه

س	جيد جداً	ممتاز	جيد	جيد جداً	مقبول
ص	ممتاز	جيد جداً	مقبول	جيد جداً	مقبول

الحل :

س	ص	ر(س)	ر(ص)	ف	ف²
جيد جداً	ممتاز	٢,٥	١	١,٥	٢,٢٥
ممتاز	جيد جداً	١	٢,٥	-١,٥	٢,٢٥
جيد	مقبول	٤	٤,٥	-٠,٥	٠,٢٥
جيد جداً	جيد جداً	٢,٥	٢,٥	صفر	صفر
مقبول	مقبول	٥	٤,٥	٠,٥	٠,٢٥
					٥

من الجدول : ن = ٥

مج ف² = ٥

∴ $ر = ١ - \frac{٦ \text{ مج ف}^٢}{ن(ن^٢ - ١)}$

$= ١ - \frac{٦ \times ٥}{٥ \times ٢٤} = ٠,٧٥$

← **طردي قوي**

ملحوظة : (١) للتأكيد مج ف = صفر **ملحوظة** (٢) معامل بيرسون أدق من معامل سبيرمان لأنه يعتمد على القيم



الانحدار

هو أسلوب إحصائي يمكن بواسطته تقدير أحد المتغيرين بمعلومية الآخر

معادلة خط الانحدار

ص = أ + ب س

ب ← معامل الانحدار

ب = (ن مجـ س ص − مجـ س × مجـ ص) / (ن مجـ س² − (مجـ س)²) ، أ = (مجـ ص − ب مجـ س) / ن

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة الانحدارية |

(ص من الجدول) (ص من معادلة الانحدار)

مثال ٥

من بيانات الجدول الآتي

س	١٠	١٢	١٥	١٢	١٤	٨
ص	٦	٨	٦	٦	٩	٥

أوجد:

١- معادلة خط الانحدار

٢- تنبأ بقيمة ص عندما س = ٧

٣- أوجد قيمة الخطأ عندما س = ٨

الحل:

من الجدول

ن = ٦ (عدد البيانات)

س	ص	س²	ص²	س ص
١٠	٦	١٠٠	٣٦	٦٠
١٢	٨	١٤٤	٦٤	٩٦
١٥	٦	٢٢٥	٣٦	٩٠
١٢	٦	١٤٤	٣٦	٧٢
١٤	٩	١٩٦	٨١	١٢٦
٨	٥	٦٤	٢٥	٤٠
٧١	٤٠	٨٧٣	٢٧٨	٤٨٤

مجـ س = ٧١

مجـ ص = ٤٠

مجـ س² = ٨٧٣

مجـ ص² = ٢٧٨

مجـ س ص = ٤٨٤

ب = (ن مجـ س ص − مجـ س × مجـ ص) / (ن مجـ س² − (مجـ س)²) = (٦ × ٤٨٤ − ٧١ × ٤٠) / (٦ × ٨٧٣ − (٧١)²)

ب ≃ ٠٫٣٢٤٩

أ = (مجـ ص − ب مجـ س) / ن = (٤٠ − ٠٫٣٢٤٩ × ٧١) / ٦ ≃ ٢٫٨٢٢٣

① ∴ معادلة خط الانحدار هي ص = أ + ب س

يعني ص = ٢٫٨٢٢٣ + ٠٫٣٢٤٩ س

② عندما س = ٧ ∴ ص = ٢٫٨٢٢٣ + ٠٫٣٢٤٩ × ٧

∴ ص ≃ ٥٫٠٩٦٦

③ عند س = ٨ ∴ ص = ٢٫٨٢٢٣ + ٠٫٣٢٤٩ × ٨

∴ ص ≃ ٤٫٨١٤٣ ← القيمة الانحدارية

∴ مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة الانحدارية |

= | ٥ − ٤٫٨١٤٣ | ≃ ٠٫١٨٥٧

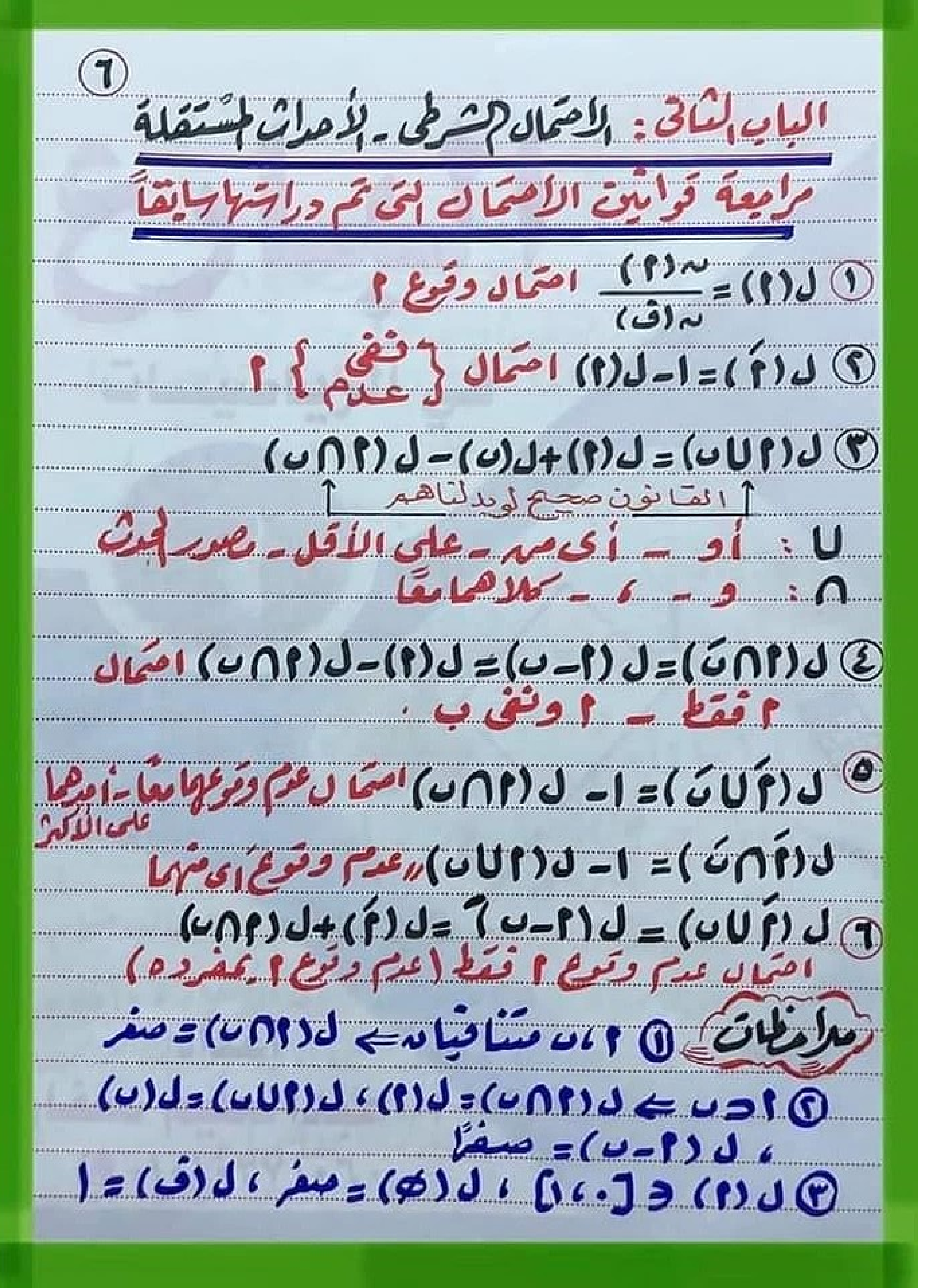
ملاحظات: ① إذا كانت ب > ٠ نوع الارتباط طردي

ب < ٠ " " عكسي

②

نوع الارتباط	طردي تام	عكسي تام	منعدم	طردي قوي	عكسي قوي

(ص، س)



الباب الثاني : الاحتمال الشرطي ـ الأحداث المستقلة

مراجعة قوانين الاحتمال التي تم دراستها سابقاً

① ل(أ) = ن(أ) / ن(ف) احتمال وقوع أ

② ل(أَ) = ١ - ل(أ) احتمال {نفي / عدم} أ

③ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

القانون صحيح لو بدلناهم

∪ : أو ـ أي من ـ على الأقل ـ مصدر الحدث

∩ : و ـ ، ـ كلاهما معاً

④ ل(أ ∩ بَ) = ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ ∩ ب) احتمال أ فقط ـ أ ونفي ب

⑤ ل(أَ ∪ بَ) = ١ - ل(أ ∩ ب) احتمال عدم وقوعهما معاً ـ أحدهما على الأكثر

ل(أَ ∩ بَ) = ١ - ل(أ ∪ ب) ،، عدم وقوع أي منهما

⑥ ل(أَ ∪ ب) = ل(أ - ب)َ = ل(أَ) + ل(أ ∩ ب)

احتمال عدم وقوع أ فقط (عدم وقوع أ بمفرده)

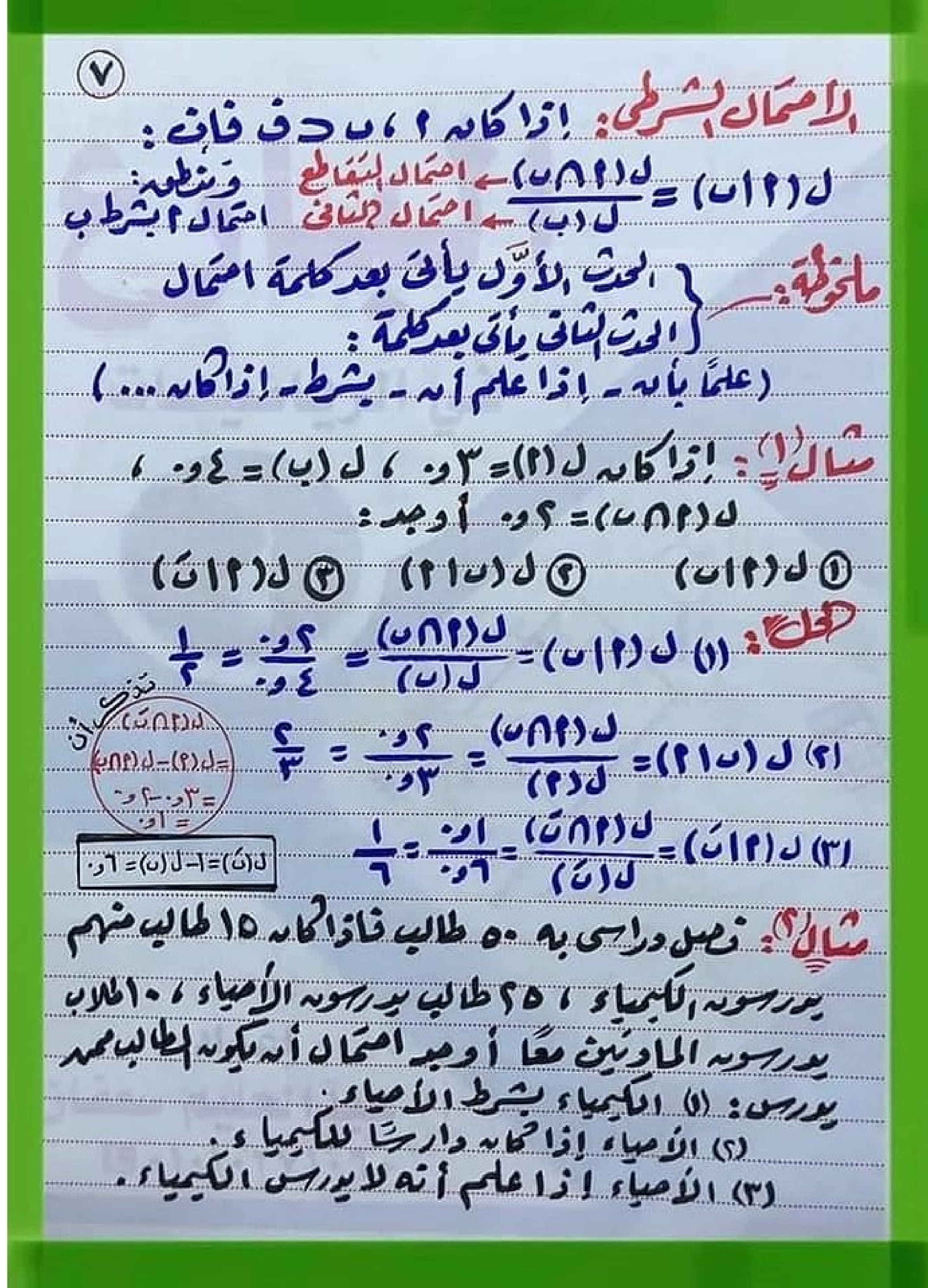
ملاحظات

① أ ، ب متنافيان ⇐ ل(أ ∩ ب) = صفر

② أ ⊂ ب ⇐ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) ، ل(أ ∪ ب) = ل(ب)

، ل(أ - ب) = صفراً

③ ل(أ) ∈ [٠ ، ١] ، ل(ø) = صفر ، ل(ف) = ١



الاحتمال الشرطي: إذا كان أ ، ب ⊂ ف فإن :

$$ل(أ|ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$$

← احتمال التقاطع

← احتمال الثاني

وتنطق: احتمال أ بشرط ب

ملحوظة: { الحدث الأول يأتي بعد كلمة احتمال
الحدث الثاني يأتي بعد كلمة :
(علماً بأن - إذا علم أن - بشرط - إذا كان ...)

مثال (١): إذا كان ل(أ) = ٠٫٣ ، ل(ب) = ٠٫٤ ، ل(أ ∩ ب) = ٠٫٢ أوجد:

① ل(أ|ب) ② ل(ب|أ) ③ ل(أ|بَ)

الحل:

(١) ل(أ|ب) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{٠٫٢}{٠٫٤}$ = $\frac{١}{٢}$

(٢) ل(ب|أ) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$ = $\frac{٠٫٢}{٠٫٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

(٣) ل(أ|بَ) = $\frac{ل(أ \cap بَ)}{ل(بَ)}$ = $\frac{٠٫١}{٠٫٦}$ = $\frac{١}{٦}$

تذكر أن
ل(أ ∩ بَ) = ل(أ) - ل(أ ∩ ب) = ٠٫٣ - ٠٫٢ = ٠٫١

ل(بَ) = ١ - ل(ب) = ٠٫٦

مثال (٢): فصل دراسي به ٥٠ طالب فإذا كان ١٥ طالب منهم يدرسون الكيمياء ، ٢٥ طالب يدرسون الأحياء ، ١٠ طلاب يدرسون المادتين معاً أوجد احتمال أن يكون الطالب محمد يدرس: (١) الكيمياء بشرط الأحياء.

(٢) الأحياء إذا كان دارساً للكيمياء.

(٣) الأحياء إذا علم أنه لا يدرس الكيمياء.

الحل: كيمياء ← أ ، أحياء ← ب ، كيمياء وأحياء أ ∩ ب

ل(أ) = ١٥/٥٠ ، ل(ب) = ٢٥/٥٠ ، ل(أ ∩ ب) = ١٠/٥٠

(١) ل(أ | ب) = ل(أ ∩ ب) / ل(ب) = ١٠/٥٠ ÷ ٢٥/٥٠ = ٠,٤

(٢) ل(ب | أ) = ل(أ ∩ ب) / ل(أ) = ١٠/٥٠ ÷ ١٥/٥٠ = ٢/٣

(٣) ل(ب | أَ) = ل(ب ∩ أَ) / ل(أَ) = ١٥/٥٠ ÷ ٣٥/٥٠ = ٣/٧

تذكر أن

ل(ب ∩ أَ)
= ل(ب) − ل(ب ∩ أ)
= ٢٥/٥٠ − ١٠/٥٠ = ١٥/٥٠

ل(أَ) = ١ − ل(أ)
= ٣٥/٥٠

الأحداث المستقلة:

يقال أن: أ ، ب حدثان مستقلان إذا كان

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

مثال (١): إذا كان ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٣ ، ل(أ − ب) = ٠,٤٢ أثبت أن أ ، ب حدثان مستقلان.

الحل: ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

∵ ٠,٤٢ = ٠,٦ − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب) = ٠,٦ − ٠,٤٢ = ٠,١٨

∵ ل(أ) × ل(ب) = ٠,٦ × ٠,٣ = ٠,١٨

∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

∴ أ ، ب حدثان مستقلان.

مثال (٢): إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان

ل(أ) = ٦و٠ ، ل(ب) = ٣و٠ أوجد :

① ل(أ ∩ ب) ② ل(أ ∪ ب) ③ ل(أ | ب)

الحل:

∵ أ ، ب مستقلان

① ∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٦و٠ × ٣و٠ = ١٨و٠

② ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٦و٠ + ٣و٠ − ١٨و٠ = ٧٢و٠

③ ل(أ | ب) = ل(أ ∩ ب) / ل(ب) = ١٨و٠ / ٣و٠ = ٦و٠

مثال ③: أطلق صديقان قذيفة نحو هدف ما فإذا كان

ل(أ) = ٦و٠ ، ل(ب) = ٥و٠ أوجد احتمال إصابة

الهدف بقذيفة واحدة فقط .

الحل: ∵ إصابة الهدف من أحدهما لا يؤثر في الآخر

∴ أ ، ب مستقلان

∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٦و٠ × ٥و٠ = ٣و٠

احتمال إصابة الهدف بقذيفة واحدة فقط

= ل(أ − ب) + ل(ب − أ) = ل(أ ∪ ب) − ل(أ ∩ ب)

= [ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)] − ل(أ ∩ ب)

= ٦و٠ + ٥و٠ − ٣و٠ − ٣و٠ = ٥و٠

مثال (٤): كيس يحتوي على ٣ كرات حمراء ، ٥ كرات سوداء ، إذا سحبت كرتان الواحدة تلو الأخرى دون إحلال (إرجاع).

ما احتمال أن تكون :

(أ) الكرتان سوداوين ؟

(ب) الأولى سوداء والثانية حمراء ؟

(جـ) إحدى الكرتين حمراء والأخرى سوداء ؟

الحل :

(أ) الأولى سوداء و الثانية سوداء

$$= \frac{٥}{٨} \times \frac{٤}{٧} = \frac{٥}{١٤}$$

خلي
بالك
معايا :

ف ← ∩ ← ×

الكسر الثاني في الضرب طرحنا منه ١ لأن السحب بدون إحلال

(ب) الأولى سوداء و الثانية حمراء

$$= \frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٧} = \frac{١٥}{٥٦}$$

(جـ) الأولى حمراء والثانية سوداء أو الأولى سوداء والثانية حمراء

$$\frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{٧} + \frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٧} = \frac{١٥}{٢٨}$$

لاحظ أن :

١) إذا كان أ ، ب مستقلان فإن ل(أ | ب) = ل(أ)

٢) الحدثان المتنافيان يكونان مستقلين إذا وفقط إذا كان احتمال أحدهما = ٠ . لأن ل(أ) × ل(ب) = ٠ .

الباب الثالث المتغير العشوائي المتقطع

تعريف: المتغير العشوائي المتقطع س هو دالة مجالها ف (فضاء العينة) ومجالها المقابل ح ← الأعداد الحقيقية

مثال توضيحي: في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين

ف = { (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك) }

إذا كان المتغير العشوائي هو عدد الكتابات فإن

مدى المتغير العشوائي = { ٠، ١، ٢ }

ملحوظة: التجربة الواحدة يعرف عليها العديد من المتغيرات العشوائية

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي: هو جدول كما بالشكل

$س_ر$	٠	١	٢	المجموع
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١

المدى ←

الاحتمالات المناظرة ← $\sum د(س_ر) = ١$

وهذا الجدول يمثل التوزيع الاحتمالي للمثال التوضيحي السابق

مثال (١)

إذا كان س متغيراً عشوائياً مداه { ١، ٢، ٣ } وكان:

ل(س = ١) = ٢م ، ل(س = ٢) = ٣م ، ل(س = ٣) = م

أوجد قيمة م

الحل

∵ س متغير عشوائي ∴ $\sum د(س_ر) = ١$

∴ د(١) + د(٢) + د(٣) = ١ ∴ ٢م + ٣م + م = ١

٦م = ١ ⟸ م = $\frac{١}{٦}$

حساب : ① الوسط الحسابي (التوقع) ← μ
② التباين ← σ^2 ③ الانحراف المعياري ← σ

س ر	د(س ر)	س ر . د(س ر)	س²ر . د(س ر)
① المعطى العمود الأول	② الاحتمالات العمود الثاني	① × ② ينتج العمود الثالث	① × ③ ينتج العمود الرابع
مج	١	Σ س ر . د(س ر) = μ	Σ س²ر . د(س ر)

وبعد استكمال الجدول يكون :

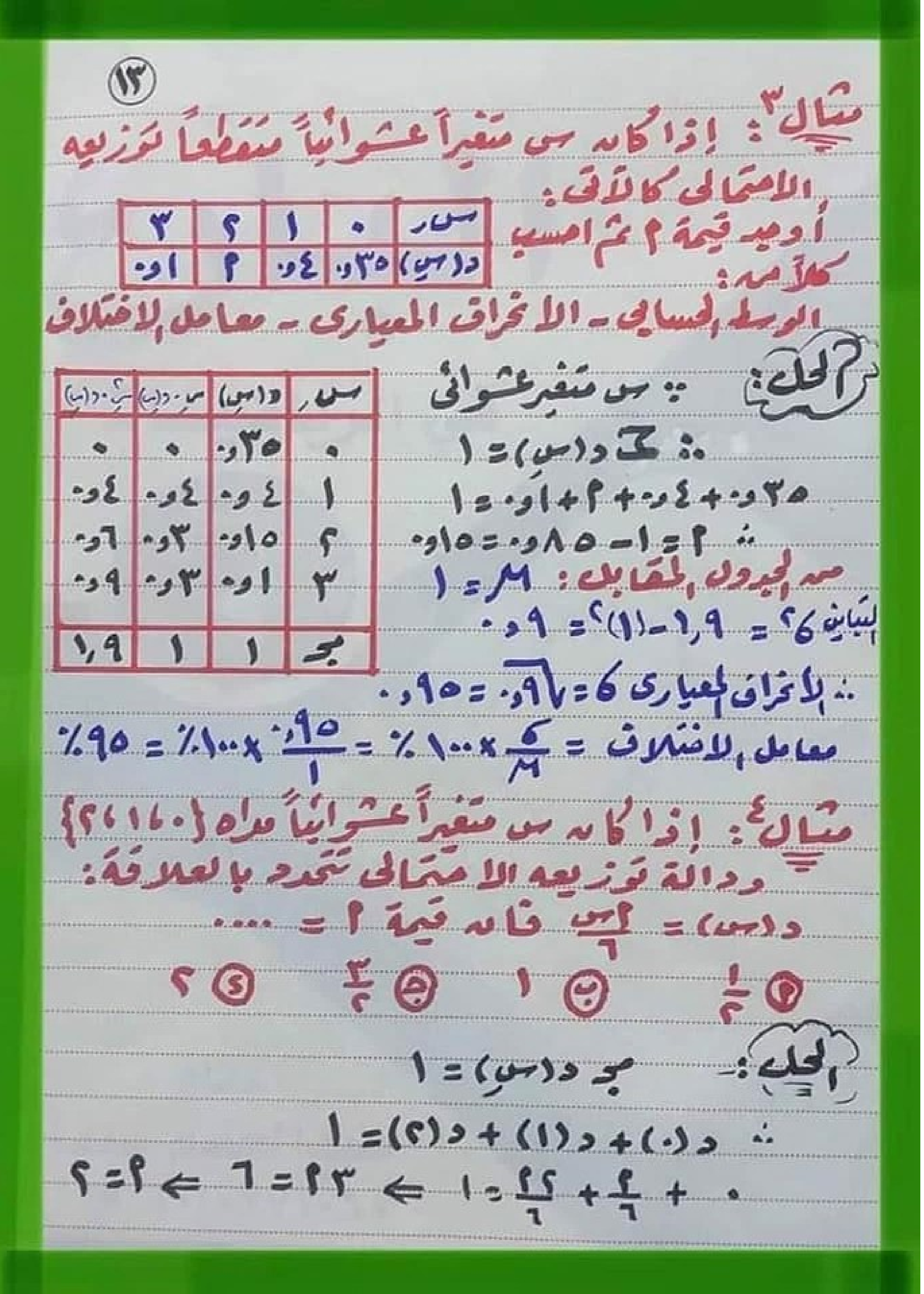
* الوسط الحسابي μ = Σ س ر . د(س ر) ← يعني مج العمود الثالث
* التباين σ^2 = Σ س²ر . د(س ر) − μ^2 ← يعني مج العمود الرابع − μ^2
* الانحراف المعياري σ = + √التباين
* معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu}$ × ١٠٠ %

مثال: إذا كان أحد المصانع ينتج نوعين من المصابيح أ ، ب وكان متوسط العمر لهما بالساعة ١٨٥٠ ، ١٥٨٠ وانحرافهما المعياري بالساعة ٢٥٠ ، ٢٣٠ على الترتيب احسب معامل الاختلاف لكل منهما ، ماذا تلاحظ ؟

الحل: معامل اختلاف أ = $\frac{٢٥٠}{١٨٥٠}$ × ١٠٠ % = ١٣,٥١ %

معامل اختلاف ب = $\frac{٢٣٠}{١٥٨٠}$ × ١٠٠ % = ١٤,٥٦ %

نلاحظ أن النوع ب أكثر تشتتاً من أ .



مثال ٣: إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالي كالآتي:

س_ر	٠	١	٢	٣
د(س_ر)	٠٫٣٥	٠٫٤	أ	٠٫١

أوجد قيمة أ ثم احسب كلاً من:

الوسط الحسابي - الانحراف المعياري - معامل الاختلاف

الحل:

∵ س متغير عشوائي

∴ مجـ د(س_ر) = ١

٠٫٣٥ + ٠٫٤ + أ + ٠٫١ = ١

∴ أ = ١ - ٠٫٨٥ = ٠٫١٥

س_ر	د(س_ر)	س_ر · د(س_ر)	س_ر² · د(س_ر)
٠	٠٫٣٥	٠	٠
١	٠٫٤	٠٫٤	٠٫٤
٢	٠٫١٥	٠٫٣	٠٫٦
٣	٠٫١	٠٫٣	٠٫٩
مجـ	١	١	١٫٩

من الجدول المقابل: μ = ١

التباين σ^2 = ١٫٩ - (١)² = ٠٫٩

∴ الانحراف المعياري σ = √٠٫٩ = ٠٫٩٥

معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu}$ × ١٠٠٪ = $\frac{٠٫٩٥}{١}$ × ١٠٠٪ = ٩٥٪

مثال ٤: إذا كان س متغيراً عشوائياً مداه {٠، ١، ٢} ودالة توزيعه الاحتمالي تتحدد بالعلاقة:

د(س) = $\frac{أس}{٦}$ فإن قيمة أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

الحل:

مجـ د(س_ر) = ١

∴ د(٠) + د(١) + د(٢) = ١

٠ + $\frac{أ}{٦}$ + $\frac{٢أ}{٦}$ = ١ ⇐ ٣أ = ٦ ⇐ أ = ٢